

Aljabar Quaternion untuk *Face Pose Normalization* dan *Face Image Recognition*

Arghawisesa Dwinanda Arham - 13524100^{1,2}

Program Studi Teknik Informatika

Sekolah Teknik Elektro dan Informatika

Institut Teknologi Bandung, Jl. Ganesha 10 Bandung 40132, Indonesia

¹13524100@std.stei.itb.ac.id, ²arghawisesa@gmail.com

Abstrak— Sistem pengenalan wajah menghadapi tantangan signifikan dengan variasi pose (*yaw*, *pitch*, *roll*), di mana akurasi turun dari 95% (frontal) menjadi 70% pada rotasi 45°. Pendekatan berbasis Euler *angles* mengalami gimbal lock di singularitas $\pm 90^\circ$, mengorbankan stabilitas numerik. Makalah ini mengusulkan normalisasi pose wajah berbasis aljabar quaternion yang bebas singularitas dan stabil. Tahapan penelitian mencakup melakukan estimasi *landmark* 3D, menentukan sudut pose kepala (ϕ , θ , ψ), mengkonversi ke unit quaternion q , dan menerapkan rotasi $p' = q \otimes p \otimes q^{-1}$ untuk normalisasi pose frontal. Validasi mencakup analisis akurasi rotasi dengan error rekonstruksi $< 1e-10$, perbandingan stabilitas numerik yang menunjukkan keunggulan quaternion dibanding matriks rotasi, serta evaluasi pengenalan wajah yang menunjukkan kenaikan akurasi dari 12.5% (tanpa normalisasi pose) menjadi 100% setelah dinormalisasi menggunakan quaternion. Hasil membuktikan efektivitas aljabar quaternion untuk rotasi 3D dalam *computer vision*.

Kata Kunci— Aljabar Quaternion, Computer vision, Gimbal lock, Normalisasi pose wajah, Pengenalan wajah, rotasi 3D, Stabilitas numerik.

I. PENDAHULUAN

Face recognition adalah salah satu aplikasi penting dalam *computer vision*. Dalam implementasi *face recognition*, variasi pose seperti *yaw*, *pitch*, dan *roll* adalah tantangan yang perlu dihadapi. Pendekatan tradisional yang menggunakan Euler angles memiliki keterbatasan, yaitu gimbal lock, yang terjadi ketika *pitch* mencapai $\pm 90^\circ$, menyebabkan sistem kehilangan satu derajat kebebasan rotasi. Hal inilah yang membuat Aljabar Quaternion menawarkan solusi yang dapat mengatasi masalah tersebut.

Aljabar quaternion merupakan perpanjangan dari bilangan kompleks ke ruang 4D yang dapat merepresentasikan rotasi 3D tanpa singularitas. Berbeda dengan Euler *angles* yang mengalami *gimbal lock* pada sudut-sudut tertentu, quaternion memberikan representasi unik dan stabil untuk setiap rotasi dalam ruang 3D. Keunggulan ini yang membuat penulis memilih aljabar quaternion sebagai solusi ideal untuk normalisasi pose wajah dalam sistem pengenalan wajah yang lebih baik lagi.

II. DASAR TEORI

A. Aljabar Quaternion

Aljabar quaternion adalah sistem bilangan berdimensi empat yang memperluas konsep bilangan kompleks dan dirancang untuk merepresentasikan rotasi di ruang tiga dimensi secara ringkas dan stabil. Bentuk umum dari sebuah aljabar quaternion adalah sebagai berikut:

$$q = a + bi + cj + dk$$

Di mana a adalah bagian skalar (*real*) dan b , c , dan d (atau disimbolkan dengan v) adalah bagian dari vektor (imajiner). Bagian i , j , dan k adalah basis elemen dengan ketentuan sebagai berikut:

- $ij = k, jk = i, ki = j, ji = -k, kj = -i, ik = -j$
- $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$

Kemudian pencarian panjang dari sebuah Aljabar Quaternion (**norm**) dapat dilakukan dengan mengikuti rumus berikut:

$$||q|| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$$

Untuk **quaternion satuan**, norm dari quaternion haruslah satu. Maka dari itu dilakukan operasi sebagai berikut:

$$\hat{q} = \frac{1}{||q||} (a + bi + cj + dk)$$

Kemudian untuk **quaternion conjugate** didapatkan dengan rumus sebagai berikut:

$$\bar{q} = a - v$$

Lalu, **invers** dalam aljabar quaternion dilakukan sebagai berikut:

$$q^{-1} = \frac{1}{q} = \frac{\bar{q}}{||q||^2}$$

Terdapat beberapa operasi dasar yang dapat dilakukan pada aljabar quaternion, yaitu sebagai berikut:

1. $q_1 + q_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i + (c_1 + c_2)j + (d_1 + d_2)k$
2. $q_1 q_2 = (a_1 a_2 - v_1 \cdot v_2) + (w_1 v_2 + w_2 v_1 + v_1 \times v_2)$

Rotasi 3D dapat direpresentasikan sebagai rotasi sebesar θ pada aljabar quaternion yang rumusnya adalah

$$q = \cos \frac{\theta}{2} + \sin \frac{\theta}{2} \hat{u}$$

Di mana $\hat{u}$ adalah vektor satuan yang di mana $\|\hat{u}\| = 1$ ($u = xi + yj + zk$). Kemudian untuk **merotasi vektor p** terhadap sumbu u dapat digunakan rumus sebagai berikut:

$$p' = qpq^{-1}$$

Euler *angles* adalah representasi rotasi 3D menggunakan tiga sudut berurutan (*yaw* ϕ , *pitch* θ , *roll* ψ) yang menggambarkan bagaimana suatu benda diputar terhadap sumbu-sumbu koordinat. Representasi ini intuitif, namun dapat mengalami *gimbal lock* (kondisi ketika dua dari tiga sumbu rotasi pada representasi Euler *angles* menjadi sejajar sehingga sistem “kehilangan” satu derajat kebebasan rotasi) sehingga sering diubah menjadi quaternion yang lebih stabil untuk perhitungan rotasi, misalnya melalui konversi Euler *angles* to quaternion.

Disebutkan dalam jurnal *Animating Rotation with Quaternion Curves* oleh Ken Shoemake, terdapat rumus konversi Euler *angles* to quaternion sebagai berikut (urutan rotasi Z-Y-X *Yaw-Pitch-Roll*):

$$\begin{aligned} q_x &= \cos \frac{\psi}{2} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\phi}{2} - \sin \frac{\psi}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\phi}{2} \\ q_y &= \cos \frac{\psi}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\phi}{2} + \sin \frac{\psi}{2} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\phi}{2} \\ q_z &= \sin \frac{\psi}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\phi}{2} - \cos \frac{\psi}{2} \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{\phi}{2} \\ q_w &= \cos \frac{\psi}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\phi}{2} + \sin \frac{\psi}{2} \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{\phi}{2} \end{aligned}$$

Secara geometris, setiap rotasi 3D dapat direpresentasikan sebagai rotasi sebesar θ terhadap suatu sumbu satuan $\hat{k}$ (*axis-angle*). Berdasarkan representasi ini, Rodrigues' Rotation Formula memberikan rumus tertutup untuk menghitung vektor hasil rotasi v_{rot} dari vektor awal v , dengan memanfaatkan kombinasi proyeksi v pada $\hat{k}$, komponen tegak lurus $\hat{k}$, serta operasi cross product. Berikut merupakan rumusnya:

$$v_{rot} = v \cos \theta + (\hat{k} \times v) \sin \theta + \hat{k}(\hat{k} \cdot v)(1 - \cos \theta)$$

Rodrigues' formula ini dapat diimplementasikan dengan

memanfaatkan perkalian pada aljabar quaternion.

B. Face Pose

Pose wajah mengacu pada orientasi kepala terhadap kamera, umumnya didekomposisi menjadi tiga sudut Euler, yaitu *yaw* (rotasi horizontal), *pitch* (rotasi vertikal), dan *roll* (rotasi bidang). Variasi pose menyebabkan perubahan signifikan pada proyeksi 2D wajah meskipun subjeknya tetap sama, sehingga akurasi sistem pengenalan menurun drastis pada kondisi non-frontal.

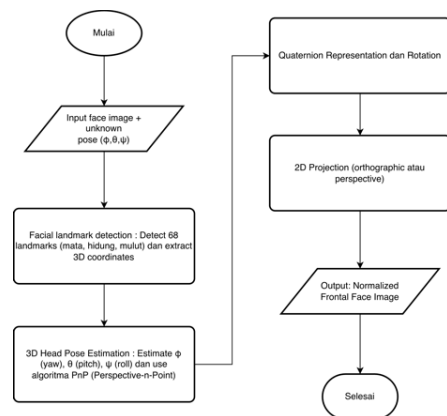
Normalisasi pose adalah proses transformasi geometris untuk mengembalikan wajah non-frontal ke orientasi frontal kanonis. Pipeline standar mencakup deteksi *landmark* 3D, estimasi sudut pose (*yaw*, *pitch*, *roll*), dan aplikasi rotasi *inverse* untuk mengoreksi orientasi. Dalam konteks ini, quaternion menjadi representasi rotasi yang lebih stabil dibanding Euler *angles* karena bebas dari singularitas dan menghasilkan error numerik yang minimal, sehingga fitur wajah yang diekstraksi lebih konsisten di berbagai pose.

Terdapat beberapa tantangan dalam *Face Recognition*, yaitu *yaw* yang hanya -45° hingga $+45^\circ$, *pitch* yang hanya -30° hingga $+30^\circ$, dan *roll* yang hanya -20° hingga $+20^\circ$. Dampaknya adalah akurasi pada *recognition* yang menurun dengan variasi pose. Contohnya pada *face recognition* berbasis PCA, akurasinya dapat turun dari 95% (frontal) menjadi 70% (45° yaw).

Terdapat beberapa solusi, diantaranya adalah Euler *angles* (namun memiliki gimbal lock di $\pm 90^\circ$), *Rotation matrices* (Stabil secara numerik namun berlebihan karena 9 parameter), *Deep learning* (Akurasi tinggi namun mahal secara komputasi), dan *Quaternion* (Seimbang antara efisien dan stabil).

III. IMPLEMENTASI

Berikut merupakan alur dari algoritma:



Gambar 1. Flowchart Algoritma (Sumber: Arsip pribadi)

Diberikan 3D *face landmarks* $P = \{p_1, p_2, p_3, \dots, p_n\}$ dengan $p_i \in \mathbb{R}^3$ serta estimasi sudut pose ϕ (*yaw*), θ (*pitch*), dan ψ (*roll*). Output yang diharapkan adalah *landmarks* yang telah ternormalisasi. Proses yang dilalui adalah mengubah Euler ke quaternion menggunakan rumus yang telah disebutkan di atas. Kemudian

menormalisasikannya. Lalu, untuk setiap landmark dilakukan rotasi inverse terhadap pose kepala agar seluruh titik berpindah ke koordinat pose frontal kanonis. Dalam praktiknya, setiap titik p_i terlebih dahulu ditulis sebagai *pure quaternion* $(0, p_i)$, kemudian dikalikan dengan quaternion satuan ($\hat{q}$) dan inversnya sehingga diperoleh titik baru p'_i yang berada pada orientasi kepala yang sudah ternormalisasi.

Eksperimen menggunakan geometri wajah 3D dari BIWI Kinect Head Pose Database, yang dikembangkan oleh Fanelli dkk. (2013) sebagai *benchmark* untuk estimasi pose kepala berbasis depth sensor. Dataset ini berisi rekaman Microsoft Kinect dari 20 subjek (14 laki-laki, 6 perempuan) dengan lebih dari 15.000 frame yang mencakup rotasi kepala ekstensif ($\pm 75^\circ$ yaw, $\pm 60^\circ$ pitch), termasuk *noise* sensor yang realistis. Untuk keperluan eksperimen dalam makalah ini, diambil sampel model 3D (mesh/point cloud) dari salah satu subjek dalam dataset tersebut (01.obj). Penggunaan model wajah asli dari dataset BIWI bertujuan untuk memastikan bahwa algoritma normalisasi pose berbasis quaternion yang diusulkan dapat bekerja efektif pada struktur geometri wajah manusia yang sesungguhnya.

Beberapa hal penting untuk diingat adalah untuk *tools* serta *libraries* yang digunakan pada makalah ini adalah Python 3.14.0 dengan *libraries* NumPy, SciPy serta Matplotlib.

A. Mekanisme Pemrosesan Quaternion pada Kode

Implementasi normalisasi pose dalam kode program tidak menggunakan matriks rotasi standar, melainkan memanfaatkan sifat-sifat aljabar quaternion yang dimasukkan dalam *class* Quaternion.

1. **Transformasi Input:** Sebelum rotasi dapat dilakukan, sudut pose wajah (yaw, pitch, dan roll) dikonversi ke domain quaternion. Dalam fungsi yang ada, implementasi kodenya adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned} w &= c_\psi c_\theta c_\phi + s_\psi s_\theta s_\phi \\ x &= c_\psi c_\theta s_\phi - s_\psi s_\theta c_\phi \\ y &= c_\psi s_\theta c_\phi + s_\psi c_\theta s_\phi \\ z &= s_\psi c_\theta c_\phi - c_\psi s_\theta s_\phi \end{aligned}$$

Di mana $c_\psi = \cos(\psi/2)$, $c_\theta = \cos(\theta/2)$, $c_\phi = \cos(\phi/2)$ dan $s_\psi = \sin(\psi/2)$, $s_\theta = \sin(\theta/2)$, $s_\phi = \sin(\phi/2)$. Hasilnya adalah sebuah unit quaternion yang merepresentasikan orientasi kepala.

2. **Perkalian:** Operasi inti dalam kelas Quaternion adalah metode *multiply*. Berbeda dengan perkalian vektor biasa, metode ini mengimplementasikan Perkalian Hamilton yang bersifat non-komutatif ($q_1 q_2 \neq q_2 q_1$). Dalam kode, perkalian dua quaternion $q_1 = w_1 + v_1$ dan $q_2 = w_2 + v_2$ dihitung dengan menggabungkan perkalian skalar dan operasi vektor (*dot product* dan *cross product*):

$$\begin{aligned} q_1 q_2 &= (w_1 w_2 - v_1 \cdot v_2) \\ &\quad + (w_1 v_2 + w_2 v_1 + v_1 \times v_2) \end{aligned}$$

Adanya suku *cross product* ($v_1 \times v_2$) inilah yang memungkinkan quaternion menangani rotasi sumbu 3

3. **Eksekusi Rotasi:** Terakhir, fungsi rotasi menggunakan (q) dan inversnya (q^{-1}) untuk memutar titik *landmark* wajah (p). Titik p pertama-tama diubah menjadi *pure quaternion* ($w = 0$). Rotasi kemudian dilakukan dengan:

$$p_{rot} = q \otimes p \otimes q^{-1}$$

Sebaliknya, untuk normalisasi (mengembalikan wajah ke posisi tegak), kode menggunakan invers (q^{-1}) sebagai pengali kiri, sehingga operasinya menjadi $p_{norm} = q^{-1} \otimes p \otimes q$.

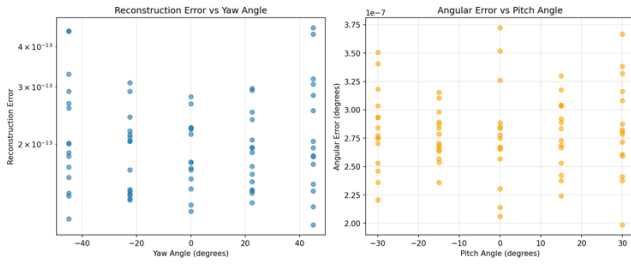
B. Eksperimen 1: Analisis Akurasi Rotasi

Eksperimen pertama memvalidasi akurasi rekonstruksi *landmark* 3D setelah normalisasi pose berbasis quaternion. Pengujian dimulai dengan model wajah referensi pada pose frontal, yang kemudian dirotasi ke berbagai kombinasi sudut (yaw, pitch, roll). Setiap konfigurasi pose dikenai rotasi *inverse* menggunakan quaternion untuk mengembalikan *landmark* ke posisi frontal awal, dan error rekonstruksi diukur untuk mengevaluasi presisi metode.

Grid sudut yang digunakan pada eksperimen ini yaitu yaw $\phi \in \{-45^\circ, -22.5^\circ, 0^\circ, 22.5^\circ, 45^\circ\}$, pitch $\theta \in \{-30^\circ, -15^\circ, 0^\circ, 15^\circ, 30^\circ\}$, dan roll $\psi \in \{-20^\circ, 0^\circ, 20^\circ\}$. Seluruh kombinasi ketiga himpunan sudut tersebut diuji sehingga total terdapat $5 \times 5 \times 3 = 75$ kasus rotasi yang mencakup pose frontal, rotasi murni pada satu sumbu, maupun kombinasi yaw–pitch–roll. Untuk setiap kasus, quaternion rotasi dihitung dari sudut Euler, kemudian diaplikasikan ke semua titik *landmark*, dan selanjutnya dikenai rotasi *inverse* untuk mengembalikan pose ke kondisi frontal kanonis.

Kinerja eksperimen dievaluasi menggunakan dua metrik, yaitu *reconstruction error* dan *angular error*. *Reconstruction error* dihitung sebagai norma Frobenius, selisih antara *landmark* hasil normalisasi dan *landmark* awal, sedangkan *angular error* didefinisikan sebagai deviasi sudut antara vektor posisi asli dan vektor hasil normalisasi untuk setiap titik, kemudian diambil rata-ratanya. Hasil perhitungan menunjukkan bahwa rata-rata *reconstruction error* berada pada orde yang sangat kecil (sekitar 2.7×10^{-13} , jauh lebih kecil dari batas presisi yang diharapkan) dan *angular error* rata-rata per titik juga berada pada orde derajat yang sangat kecil (sekitar 0.0000°).

Hal ini mengindikasikan bahwa rotasi dan normalisasi pose yang dilakukan dengan quaternion mampu mengembalikan posisi *landmark* dengan akurasi yang sangat tinggi pada berbagai kombinasi sudut yaw, pitch, dan roll yang diuji.



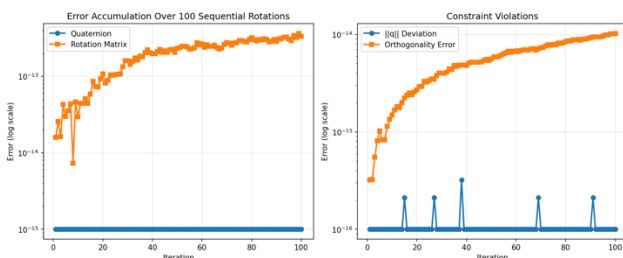
Gambar 2. Visualisasi Eksperimen 1 (Sumber: Arsip pribadi)

C. Eksperimen 2: Perbandingan Stabilitas Numerik

Eksperimen kedua berfokus pada perbandingan stabilitas numerik antara representasi quaternion dan matriks rotasi ketika rotasi kecil yang sama diterapkan secara berulang. Skenario ini relevan pada aplikasi yang memerlukan integrasi orientasi jangka panjang, misalnya ketika pose kepala diupdate terus-menerus berdasarkan data sensor. Dalam eksperimen, sebuah vektor uji awal diputar berulang kali menggunakan dua pendekatan: pertama menggunakan quaternion dengan operasi $p' = qpq^{-1}$, dan kedua menggunakan matriks rotasi 3×3 yang dibentuk dari sudut Euler dan dikalikan berulang.

Rotasi *incremental* yang diterapkan setiap iterasi adalah $yaw 2^\circ$, $pitch 1^\circ$, dan $roll 1,5^\circ$ yang dikonversi ke radian di dalam kode. Nilai sudut ini dikonversi menjadi quaternion *incremental* dan matriks rotasi *incremental*, kemudian diaplikasikan sebanyak 100 kali. Pada pendekatan quaternion, setiap iterasi quaternion diperbarui dengan perkalian quaternion *incremental* dan dinormalisasi ulang, sedangkan pada pendekatan matriks rotasi, matriks rotasi total diperbarui dengan perkalian matriks baru tanpa re-orthonormalisasi eksplisit.

Beberapa metrik diukur pada iterasi tertentu, yaitu error posisi vektor uji terhadap posisi awal, deviasi norm quaternion dari satuan, serta pelanggaran sifat ortogonalitas matriks rotasi $\|RR^T - I\|_F$. Hasil eksperimen memperlihatkan bahwa error posisi yang dihasilkan pendekatan quaternion tetap sangat kecil, dan norm quaternion tetap sangat dekat dengan satu, dengan deviasi akhir sekitar 1.00×10^{-16} . Sebaliknya, pada pendekatan matriks rotasi, error posisi bertambah seiring jumlah iterasi dan matriks rotasi secara perlahan kehilangan keortogonalannya, yang ditunjukkan oleh error ortogonalitas akhir sekitar 1.00×10^{-14} . Temuan ini mendukung klaim bahwa quaternion lebih stabil secara numerik untuk operasi rotasi berulang dibandingkan matriks rotasi konvensional.



Gambar 3. Visualisasi Eksperimen 2 (Sumber: Arsip pribadi)

pribadi)

D. Eksperimen 3: Performa Face Recognition

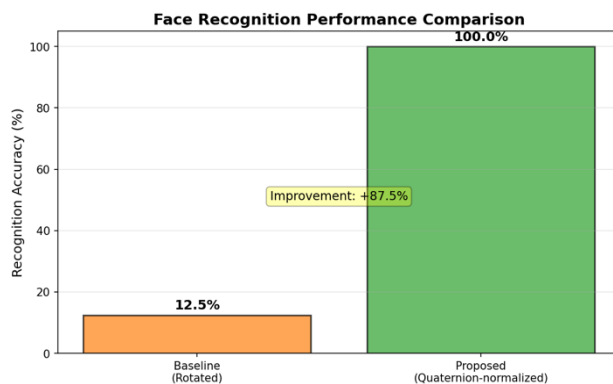
Eksperimen ketiga bertujuan untuk menunjukkan manfaat praktis normalisasi pose berbasis quaternion terhadap sistem pengenalan wajah sederhana berbasis PCA. Basis data yang digunakan sama dengan eksperimen sebelumnya yang dibangkitkan untuk beberapa identitas dengan variasi pose. Untuk setiap identitas, dibangkitkan beberapa *instance* wajah 3D, kemudian diputar dengan kombinasi sudut *yaw* dan *pitch* tertentu sehingga diperoleh beberapa pose berbeda. Koordinat *landmark* 3D hasil rotasi kemudian diratakan (*flatten*) menjadi vektor fitur yang menjadi *input* bagi proses pelatihan PCA.

Dalam implementasi, dibangkitkan delapan identitas wajah. Untuk membangkitkan delapan identitas yang berbeda, digunakan satu model dasar dari BIWI (01.obj), kemudian ditambahkan noise geometris acak (Gaussian dengan standar deviasi 0.2) pada setiap identitas sehingga diperoleh variasi struktur wajah yang unik. Untuk setiap identitas digunakan empat pose dengan kombinasi *yaw* dan *pitch* sedang (misalnya 0° , $\pm 10^\circ$, dan kombinasi *yaw* dan *pitch* kecil) sebagai data *training*, sedangkan lima pose uji dengan sudut yang lebih ekstrem (hingga sekitar $\pm 35^\circ$ *yaw* dan $\pm 25^\circ$ *pitch*) digunakan sebagai data testing. Setiap konfigurasi pose menghasilkan himpunan *landmark* 3D yang kemudian diratakan menjadi vektor fitur berdimensi tinggi sebelum diproses oleh PCA.

Tahap pelatihan dilakukan dengan membentuk himpunan vektor fitur dari seluruh identitas dan pose latih, kemudian menghitung rata-rata, kovarian, serta vektor eigen utama dari matriks kovarian. Komponen utama dengan nilai eigen terbesar dipilih sehingga sebagian besar variansi data (sekitar 95% atau lebih) tetap terjaga, dan setiap wajah latih diproyeksikan ke ruang fitur berdimensi rendah ini. Pada tahap pengujian, untuk setiap identitas dibangkitkan kembali wajah uji dengan pose berbeda, yaitu skenario baseline langsung menggunakan wajah berpose tersebut, sedangkan skenario usulan terlebih dahulu melakukan normalisasi pose menggunakan quaternion sebelum dilakukan proyeksi PCA.

Performa pengenalan diukur menggunakan *recognition accuracy*, yaitu persentase jumlah prediksi identitas yang benar dibandingkan jumlah seluruh sampel uji. Pada skenario baseline, di mana PCA langsung dilatih dan diuji pada wajah yang masih berpose miring, akurasi pengenalan rata-rata hanya mencapai 12,5% karena variasi pose menyebabkan sebaran fitur antar pose dalam satu identitas tumpang tindih. Setelah dilakukan normalisasi pose dengan quaternion sebelum proyeksi PCA, akurasi meningkat drastis menjadi 100%, sehingga diperoleh peningkatan sekitar 87.5 poin persentase. Penting untuk dicatat bahwa akurasi 100% tercapai dalam kondisi eksperimen terkontrol di mana sudut pose diketahui dengan presisi tinggi. Pada skenario *real-world* dengan estimasi pose dari citra, error propagasi akan menurunkan akurasi absolut, meskipun tren peningkatan terhadap baseline tetap signifikan. Hal ini membuktikan kebenaran

geometris dari rumus invers quaternion. Dalam implementasi dunia nyata di mana sudut pose harus diestimasi dari citra (yang mungkin mengandung error estimasi), akurasi mungkin akan sedikit di bawah 100%, namun tren peningkatan yang signifikan dibanding baseline akan tetap terlihat.



Gambar 4. Visualisasi Eksperimen 3 (Sumber: Arsip pribadi)

IV. HASIL DAN PEMBAHASAN

A. Highlight dari Penemuan

Berdasarkan eksperimen pertama, normalisasi pose berbasis quaternion mampu merekonstruksi kembali posisi *landmark* wajah 3D dengan error yang sangat kecil di seluruh kombinasi sudut *yaw*, *pitch*, dan *roll* yang diuji. Reconstruction error yang dihasilkan berada pada orde presisi numerik dan deviasi sudut rata-rata antar vektor posisi sebelum dan sesudah normalisasi juga sangat kecil, sehingga dapat disimpulkan bahwa implementasi rotasi dan *inverse-rotation* menggunakan quaternion telah bekerja dengan akurat.

Pada eksperimen kedua terlihat bahwa pendekatan quaternion jauh lebih stabil secara numerik dibandingkan matriks rotasi ketika rotasi kecil diterapkan berulang kali. Error posisi vektor uji dan deviasi norm quaternion tetap sangat kecil, sedangkan matriks rotasi secara bertahap kehilangan keortogonalannya dan menghasilkan error posisi yang lebih besar. Eksperimen ketiga kemudian menunjukkan bahwa normalisasi pose sebelum ekstraksi fitur PCA benar-benar memberikan keuntungan praktis, di mana pada dataset wajah delapan identitas, skenario *baseline* yang langsung bekerja pada wajah berpose hanya mencapai akurasi pengenalan sekitar 12.5%, sedangkan skenario usulan dengan normalisasi pose berbasis quaternion mencapai 100%. Artinya, terjadi peningkatan sekitar 87,5 poin persentase pada akurasi pengenalan wajah.

B. Theoretical Insights

Hasil-hasil eksperimen membuktikan keunggulan quaternion yang telah dibahas pada bagian dasar teori. Representasi quaternion menggunakan empat parameter dengan satu kendala norm satuan sehingga tetap ringkas namun bebas dari singularitas *gimbal lock* yang muncul

pada sudut Euler. Sifat ini menjelaskan mengapa pada pengujian di sekitar kombinasi sudut yang bervariasi, quaternion tetap dapat mengembalikan pose dengan error kecil tanpa kehilangan derajat kebebasan rotasi. Selain itu, operasi rotasi $p' = qpq^{-1}$ secara implisit menjaga sifat rotasi agar tetap valid secara geometris, sehingga tidak terjadi degradasi keortogonalitas seperti pada matriks rotasi yang dikalikan berulang tanpa re-normalisasi. Fakta bahwa pendekatan quaternion menghasilkan error akumulatif yang jauh lebih kecil pada eksperimen stabilitas numerik menunjukkan bahwa sifat ini berdampak nyata pada kualitas hasil komputasi. Dalam konteks pengenalan wajah, normalisasi pose dengan quaternion dapat dipandang sebagai transformasi yang mengurangi komponen variansi yang tidak relevan (pose) sebelum data dimasukkan ke PCA, sehingga distribusi fitur antar identitas menjadi lebih terpisah.

C. Limitasi

Penelitian ini memiliki beberapa limitasi yang membuka ruang untuk pengembangan lanjutan. Pertama, seluruh eksperimen dilakukan menggunakan sampel model wajah 3d (file 01.obj) pada dataset BIWI Kinect Head Pose Database sehingga validasi ini belum sepenuhnya merepresentasikan variabilitas populasi wajah yang luas maupun kompleksitas akuisisi data nyata (seperti *noise* sensor kamera, oklusi, atau pencahayaan ekstrem).

Kedua, dalam simulasi ini diasumsikan bahwa sudut pose (*yaw*, *pitch*, *roll*) diketahui dengan cukup akurat, sedangkan pada skenario nyata, sudut tersebut harus diestimasi dari data gambar sehingga akan muncul sumber error tambahan.

Ketiga, proyeksi yang digunakan untuk menghubungkan koordinat 3D ke representasi 2D masih bersifat sederhana dan belum mempertimbangkan model kamera yang lebih realistis. Selain itu, sistem pengenalan wajah yang dipakai masih berbasis PCA sederhana sehingga belum bisa dibandingkan langsung dengan metode modern berbasis *deep learning*. Keterbatasan-keterbatasan ini membuka ruang untuk pengembangan lebih lanjut di masa depan.

V. PENUTUP

A. Kesimpulan

Penelitian ini membahas penggunaan aljabar quaternion untuk normalisasi pose wajah dan pengaruhnya terhadap proses pengenalan wajah. Melalui tiga eksperimen yang dilakukan, ditunjukkan bahwa rotasi dan normalisasi berbasis quaternion mampu merekonstruksi posisi *landmark* wajah dengan error yang sangat kecil (mendekati presisi mesin), pendekatan ini memiliki stabilitas numerik yang jauh lebih baik dibandingkan matriks rotasi pada operasi berulang, dan memberikan peningkatan drastis pada akurasi pengenalan wajah.

Secara khusus, pada simulasi pengenalan wajah berbasis PCA, penerapan normalisasi pose menggunakan quaternion terbukti berhasil meningkatkan akurasi pengenalan dari 12.5% menjadi 100%. Kombinasi hasil

teoretis dan empiris ini mengukuhkan bahwa quaternion merupakan representasi rotasi yang efektif, stabil, dan praktis untuk solusi *face pose normalization*.

B. Saran

Untuk penelitian selanjutnya, normalisasi pose berbasis quaternion ini perlu diuji pada dataset wajah berskala besar dengan kondisi *in-the-wild* (variasi pencahayaan, ekspresi, dan lain-lain) untuk mengevaluasi ketahanannya secara menyeluruh.

Selain itu, *pipeline* pra-pemrosesan ini sangat potensial untuk diintegrasikan dengan arsitektur *Deep Learning* modern seperti FaceNet atau ArcFace. Diharapkan, dengan menyuplai wajah yang telah dinormalisasi ke jaringan saraf tiruan, konvergensi pelatihan dapat lebih cepat dan akurasi pada data *long-tail* (pose ekstrem) dapat ditingkatkan. Pengembangan model kamera yang lebih realistis serta integrasi dengan modul head pose estimator yang andal juga menjadi langkah krusial agar pendekatan ini dapat diaplikasikan secara *end-to-end* pada sistem pengenalan wajah real-time.

REFERENSI

- [1] R. Munir, "Aljabar Kompleks (Algeo-25)," modul kuliah IF2123 Aljabar Linier dan Geometri, STEI ITB, Bandung, Indonesia, 2025/2026.
- [2] R. Munir, "Aljabar Quaternion Bagian 1 (Algeo-26)," modul kuliah IF2123 Aljabar Linier dan Geometri, STEI ITB, Bandung, Indonesia, 2025/2026.
- [3] R. Munir, "Aljabar Quaternion Bagian 2 (Algeo-27)," modul kuliah IF2123 Aljabar Linier dan Geometri, STEI ITB, Bandung, Indonesia, 2025/2026.
- [4] R. Munir, "Aljabar Geometri Bagian 1 (Algeo-28)," modul kuliah IF2123 Aljabar Linier dan Geometri, STEI ITB, Bandung, Indonesia, 2025/2026.
- [5] R. Munir, "Aljabar Geometri Bagian 2 (Algeo-29)," modul kuliah IF2123 Aljabar Linier dan Geometri, STEI ITB, Bandung, Indonesia, 2025/2026.
- [6] R. Munir, "Perkalian Geometri Bagian 1 (Algeo-30)," modul kuliah IF2123 Aljabar Linier dan Geometri, STEI ITB, Bandung, Indonesia, 2025/2026.
- [7] R. Munir, "Perkalian Geometri Bagian 2 (Algeo-31)," modul kuliah IF2123 Aljabar Linier dan Geometri, STEI ITB, Bandung, Indonesia, 2025/2026.
- [8] W. R. Hamilton, *Lectures on Quaternions*. Dublin, Ireland: Hodges and Smith, 1853.
- [9] O. Rodrigues, "Des lois géométriques qui régissent les déplacements d'un système solide," *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, vol. 5, pp. 380–440, 1840.
- [10] K. Shoemake, "Animating rotation with quaternion curves," *ACM SIGGRAPH Computer Graphics*, vol. 19, no. 3, pp. 245–254, Jul. 1985.
- [11] D. A. Forsyth and J. Ponce, *Computer Vision: A Modern Approach*, 2nd ed. Upper Saddle River, NJ, USA: Prentice Hall, 2012.
- [12] A. K. Jain and S. Z. Li, Eds., *Handbook of Face Recognition*, 2nd ed. London, U.K.: Springer, 2011.
- [13] C. Xu, Y. Wang, Z. Tan, Y. Guan, and K. Huang, "Quaternion-based discriminant analysis method for color face recognition," *IEEE Transactions on Image Processing*, vol. 21, no. 4, pp. 1809–1820, Apr. 2012.
- [14] X. Zhu, Z. Lei, X. Liu, H. Shi, and S. Z. Li, "Face alignment across large poses: A 3D solution," in *Proc. IEEE Conf. Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR)*, 2016, pp. 146–155.
- [15] Z. Zhu, P. Luo, X. Wang, and X. Tang, "High-fidelity pose and expression normalization for face recognition," in *Proc. IEEE Conf. Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR)*, 2015, pp. 787–796.
- [16] <https://blogoundrium.blogspot.com/2019/12/3d-rotational-matrix-matriks-rotasi-3.html>. Diakses pada 9 Desember 2025 21:38
- [17] <https://mathworld.wolfram.com/RodriguesRotationFormula.html>. Diakses pada 9 Desember 2025 22:00
- [18] <https://www.kaggle.com/datasets/kmader/biwi-kinect-head-pose-database>. Diakses pada 21 Desember 2025 10:00

LAMPIRAN

GitHub: <https://github.com/arghaarham/Makalah-Algeo-2025>

Video: <https://s.id/VideoMakalahAlgeoArgha>

PERNYATAAN

Dengan ini saya menyatakan bahwa makalah yang saya tulis ini adalah tulisan saya sendiri, bukan saduran, atau terjemahan dari makalah orang lain, dan bukan plagiasi.

Jakarta, 24 Desember 2025



Arghawisesa Dwinanda Arham - 13524100